Pré-requis : Module Factorisation

Exercice 1 :

Développez les expressions suivantes :

$f(x)=5(x+3)^2$ $\quad g(x)=2(x+4)^2-(x-4)^2$ $\quad h(x)=(x+1)^2(x-2)$ $\quad k(x)=(x-1)^3$

Exercice 2 :

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=4x^2-4x+1$ $\quad B(x)=9x^2+12x+4$

$C(x)=(2x+1)^2-x^2$ $\quad D(x)=(x+3)^2-(2x-3)^2$

$E(x)=(x-2)(2x+5)+4(x-2)(x-1)$ $\quad F(x)=(3x-4)-2(3x-4)^2$

$G(x)=x^2-2x+1-(2x-5)^2$ $\quad H(x)=4(x+1)^2-(x-2)(2x+2)$

$I(x)=(2x-7)(3x+6)-2(2x+4)(2x-8)$ $\quad J(x)=9x^2+6x+1-5(5x+7)(6x+2)$

$K(x)=x(6x+5)+4(x-4)x$

Exercice 3 :

Vérifier dans chaque cas que les trois expressions sont les mêmes :

$A(x)=x^2-2\sqrt{2}\,x-6$ $\quad B(x)=\left(x-3\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ et $C(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2-8$

I) Fonctions linéaires et affines (polynômes de degré 1)

<u>Définition</u>:

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On dit que cette fonction est linéaire si à tout $x\in\mathbb{R}$, elle associe le réel ax, a étant un réel fixé.

On dit que cette fonction est affine si à tout $x\in\mathbb{R}$, elle associe le réel $ax+b$, a et b étant deux réels fixés.

<u>Remarque</u> :

Une fonction linéaire est aussi affine. La réciproque est fausse.

Exercice 4 :

Le degré Fahrenheit (°F) est une unité de mesure de la température. Elle était largement utilisée en Europe jusqu'à son remplacement par l'échelle de Celsius. Elle est encore utilisée de nos jours aux États-Unis et dans certains pays anglophones.

Elle doit son nom au physicien allemand Daniel Gabriel Fahrenheit, qui la proposa en 1724. Il avait décidé de fixer le zéro de son échelle comme étant la plus basse température qu'il ait mesurée durant le rude hiver de 1708 à 1709 dans sa ville natale de Danzig. Il fixa ensuite la valeur à 96 degrés (96 valant 12 × 8) comme la température du corps humain.

Ces deux températures étant peu précises, quelques temps après sa mort, il fut décidé de recalibrer l'échelle en prenant les **valeurs 32 °F et 212 °F comme points de solidification et d'ébullition de l'eau pure** (dans des conditions atmosphériques normales).

On sait que la relation qui relie degrés Celsius et degrés Fahrenheit est affine.

1) Soit x une température exprimée en degrés Celsius.
   Déterminer l'expression $F(x)$ de cette température en degrés Fahrenheit.
2) Soit x une température exprimée en degrés Fahrenheit.
   Déterminer l'expression $C(x)$ de cette température en degrés Celsius.

3) Compléter alors le tableau suivant :

°F	°C	Commentaire
-127		température climatique la plus froide enregistrée sur Terre
		Point d'égalité des deux échelles (x°C = x°F)
0		Température la plus basse mesurée par G. Fahrenheit dans son laboratoire de Danzig.
	0	Gel de l'eau
	21	Température idéale dans la classe
	37	Température du corps humain
137		température climatique la plus chaude enregistrée sur Terre
	100	Point d'ébullition de l'eau
	180	Température du four pour cuire un gâteau
1800		Température de cuisson des poteries
	1500	point de fusion du fer
	5500	température moyenne de « surface » du soleil

Exercice 5 :

Une bibliothèque propose deux types de tarifs :
Formule A : 1 € par livre emprunté.
Formule B : un abonnement annule de 12 € puis 0,20 € par livre emprunté.
Soit x le nombre de livres empruntés, $f(x)$ et $g(x)$ le coût correspondant à chacune des formules A et B.

1) Donner les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2) Représenter graphiquement chacune de ces deux fonctions.
3) Quelles formule vous parait la plus avantageuse ?

Exercice 6 :

Deux employés, Alexis et Donia, gagnent respectivement 900 € et 980 €.
On leur propose une augmentation. Ils doivent choisir entre deux formules.
Formule A : Une augmentation de 10 € par mois pendant 1 an.
Formule B : Une augmentation de 1 % par mois pendant 1 an.

1) Compléter le tableau suivant :

	Alexis		Donia	
	900,00 €		980,00 €	
Mois	Formule A	Formule B	Formule A	Formule B
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

2) Quelles formules Donia et Alexis doivent-ils choisir ?
3) Exprimer les salaires d'Alexis en fonction du nombre x de mois avec les formules A ou B.
   Ces expressions correspondant-elles à des fonctions affines ?

Propriété:

On considère a,b deux réels et la fonction affine associée $f : x \to ax+b$.

La courbe représentative de cette fonction est la droite d'équation $y = ax+b$.

La fonction f est croissante si $a>0$, décroissante sinon.

Démonstration:

a) On admettra qua le graphe est une droite.

b) Variation

Soient x_1 et x_2 deux réels. On suppose $x_1 < x_2$.

On calcule $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2)$.

Comme $x_1 < x_2$, cette expression est du signe contraire de a.

Donc si $a>0$, on obtient $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Ce qui prouve que f est croissante.

Propriété: Signe d'une fonction affine

On considère a,b deux réels, $a \neq 0$, et la fonction affine associée $f : x \to ax+b$.

Si $a>0$, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Démonstration: Résolution de l'inéquation $ax+b>0$.

Exercice 7 :

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

$f(x) = 2x-5$ $\quad$ $g(x) = -x+4$ $\quad$ $h(x) = -2x-1$

Exercice 8 :

On a dressé le tableau de signe de fonctions affines mais l'expression de la fonction a été effacée.

Compléter par une expression qui convient. Il y a-t-il plusieurs possibilités ?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
Signe de		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de		$+$	0	$-$	

Exercice 9 :

Compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$			$+\infty$
Signe de $x-3$		|	0	
Signe de $3x+2$		0	|	
$(x-3)(3x+2)$		0	0	

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-x+2$		
Signe de $x-5$		
$(-x+2)(x-5)$		

Exercice 10 :

Compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$						$+\infty$
Signe de $x-4$			$\vert$		0		
Signe de $x+1$			0		$\vert$		
Signe de $\dfrac{x-4}{x+1}$			$\Vert$		0		

x	$-\infty$						$+\infty$
Signe de $x-4$			$\vert$		0		
Signe de $x+1$			0		$\vert$		
Signe de $\dfrac{x+1}{x-4}$							

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-x+2$		
Signe de $3x+6$		
Signe de $\dfrac{-x+2}{3x+6}$		

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-x+2$		
Signe de $3x+6$		
Signe de $\dfrac{3x+6}{-x+2}$		

Exercice 11 :

Etudier le signe des expressions suivantes (on pourra construire un tableau de signes).

$A(x)=(-x+1)(-x-3)$ $\quad B(x)=(2x+3)(4x-1)$ $\quad C(x)=(-2x+4)(3x-5)$

$D(x)=x(x+3)$ $\quad E(x)=(x+3)^2$ $\quad F(x)=x^2-9$

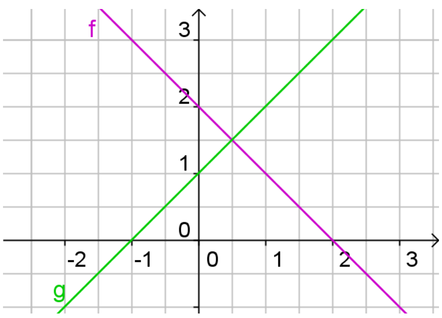
$G(x)=(1-2x)(x^2+3)$ $\quad H(x)=-4(x+1)(x-2)$

Exercice 12 :

Etudier le signe des expressions suivantes (on pourra construire un tableau de signes).

$A(x)=\dfrac{4x+1}{3-x}$ $\quad B(x)=\dfrac{x-1}{x-4}$ $\quad C(x)=\dfrac{-x-5}{3-2x}$ $\quad D(x)=\dfrac{7-3x}{3-4x}$ $\quad E(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\quad F(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$

Exercice 13 :



On a représenté graphiquement deux fonctions affines f et g.

1) Déterminer le signe et le sens de variation de la fonction f.
2) Déterminer le signe et le sens de variation de la fonction g.
3) Compléter alors le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f\times g$		

Exercice 14 :

On donne le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1) Si $x<0$ alors $f(x)<0$
2) Si $x>3$ alors $f(x)>0$
3) $x\leq -3 \Rightarrow f(x)>0$
4) Si $f(x)\leq 0$ alors $x>-2$
5) Si $f(x)\geq 0$ alors $x\geq 2$
6) $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1;2]$
7) $f(x)>0$ est équivalent à $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Exercice 15 :

On donne le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer les solutions des inéquations $f(x)<0$ et $f(x)\geq 0$.

Exercice 16 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$(1)\ x^2 \leq 9 \quad (2)\ x^2 > 4 \quad (3)\ x^2 \geq -1 \quad (4)\ x^2 < -2$

Exercice 17 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$(1)\ (4-x)(-3x-4)\leq 0$ $\qquad (2)\ 7\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x-4\right)\leq 0$ $\qquad (3)\ \frac{2x-1}{x+2}\geq 0$

$(4)\ \frac{3-x}{4x-8}<0$ $\qquad (5)\ \frac{x(x+2)}{x-1}\geq 0$ $\qquad (6)\ \frac{(2x+3)(4-x)}{x-2}<0$

Exercice 18 :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

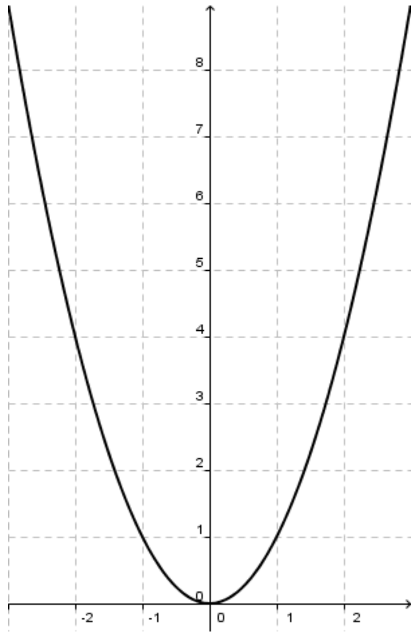
$f(x)=x(x+2)-(2x-1)(x+2)$

$g(x)=(2x+3)^2-(x+1)^2$

1) Développer $f(x)$ et $g(x)$.
2) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3) Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $g\left(\sqrt{5}\right)$
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x)=2$ $\quad g(x)=0$ et $f(x)=g(x)$.
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $g(x)<8$ $\quad f(x)\geq 0$ et $f(x)<g(x)$

II) Les trinômes du second degré (polynômes de degré 2)

1) La fonction carré



Définition:
On appelle "la fonction carré" la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to x^2$

Propriété:
La fonction carré ne s'annule qu'en 0.
La fonction carré est positive.
La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Dém:
Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
Calculons $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$.
Comme $x_1 < x_2$, la différence $x_1 - x_2$ est négative et
$f(x_1) - f(x_2)$ est du signe opposé à celui de $x_1 + x_2$.
Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 + x_2 > 0$ et $f(x_1) - f(x_2) < 0$.
On a donc $f(x_1) < f(x_2)$.
La fonction carré est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$, $x_1 + x_2 < 0$ et $f(x_1) - f(x_2) > 0$.
On a donc $f(x_1) > f(x_2)$.
La fonction carré est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 19 :
1) Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré :
$\frac{3}{4}$ $\quad 10^{-4}$ $\quad -10^{-2}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{5}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
2) Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction carré :
$4 \quad 25 \quad -9 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 1$ et $\frac{16}{49}$

Exercice 20 :
1) Rappeler les variations de la fonction carré.
2) Donner un encadrement de x^2 si le réel x vérifie $2 \le x \le 3$
3) Donner un encadrement de x^2 si le réel x vérifie $-5 \le x \le -3$
4) Donner un encadrement du réel x^2 si $x \in [-4,3]$.

Exercice 21 :
Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :
$(3 - 2\times10^{-3})^2$ et $(3 - 2\times10^{-2})^2$
$(2-\pi)^2$ et $(1-\pi)^2$

Exercice 22 :

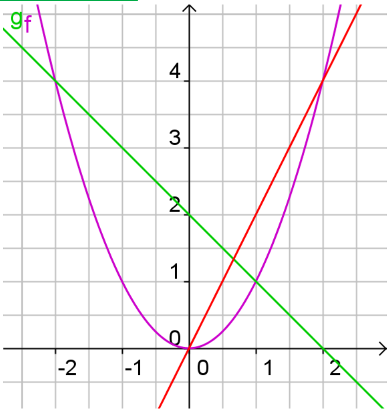
1) Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

2) Déterminer à l'aide du graphique les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

Exercice 23 :



1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, ----répondre aux questions par vrai ou faux.

a) Si $0 \leq x \leq 2$ alors $x^2 \leq 2x$

b) Si $x \leq 0$ alors $x^2 \geq 2x$

c) Si $x \leq 1$ alors $x^2 \leq 2 - x$

d) Si $-2 \leq x \leq 0$ alors $2x \leq x^2 \leq 2 - x$

e) Si $x \geq 2$ alors $x^2 \geq 2x$

f) Si $x^2 \geq 2x$ alors $x \geq 2$

2) Justifier les réponses précédentes par un raisonnement algébrique.

TP Construction de la parabole à la règle et au compas page 85 du repère et suite page 86

2) Cas général

Définition:
On appelle trinôme du second degré une fonction définie par $x \to ax^2 + bx + c$,
a, b et c étant dees réels fixés, a étant non nul.

Remarque: si a est nul, on parle de fonction affine.

a) Forme canonique

Propriété :
Tout trinôme du second degré s'écrit sous la forme $a\left[(x-\alpha)^2 + \beta\right]$,
a, α et β sont des nombres réels.

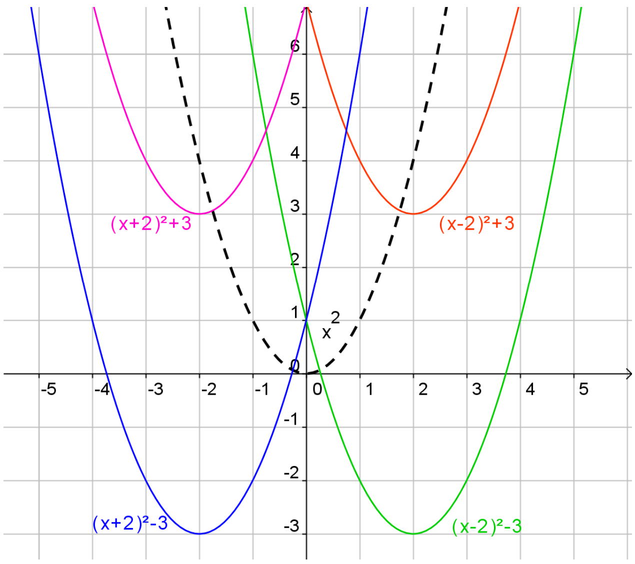
Exemples : $x^2 + 2x + 1$ $\quad x^2 + 2x + 3$ $\quad x^2 + x + 1$ $\quad 2x^2 - 6x - 10$

b) Graphe

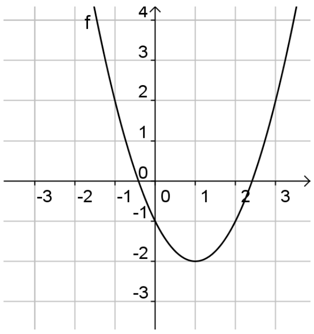
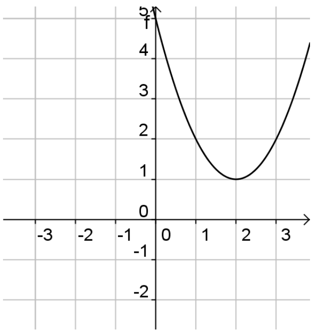
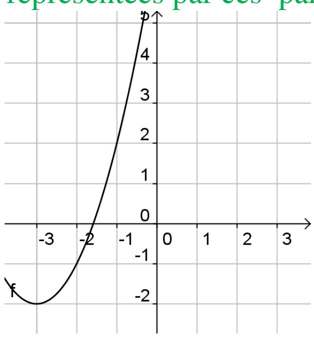
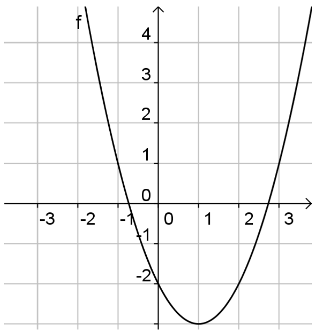
Propriété : cas particulier où $a = 1$
Le graphe de la fonction $f : x \to (x-\alpha)^2 + \beta$ s'obtient en
glissant la parabole de la fonction carré de façon à ce que son sommet soit placé en (α, β)

Exemples :

i)



Exercice 24 :
Donner les formes canoniques des fonctions trinômes représentées par ces paraboles :

Exercice 25 :

On considère le programme de calcul suivant :

$x \xrightarrow{\text{ôter } 3} \qquad \xrightarrow{\text{élever au carré}} \qquad \xrightarrow{\text{ajouter } 2}$

On note $f(x)$ le résultat obtenu.

1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2) Construire rapidement la courbe *de* f.
3) Dresser alors le tableau des variations de f.

Exercice 26 :

Dans cet exercice, l'objectif est d'utiliser un processus d'encadrements successifs pour encadrer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2+2$

1) Compléter le programme de calcul donnant la décomposition de f :

$x \longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow f(x)$

2) Compléter alors les encadrements suivants (en justifiant chacune des étapes)

a) On suppose que $1\le x\le 3$ alors :

$\le x-1\le$	car
$\le (x-1)^2 \le$	car
$\le (x-1)^2+2\le$	car

Conclusion: si $1\le x\le 3$ alors $\le f(x)\le$.

b) On suppose que $-2\le x\le 1$ alors :

$\le x-1\le$	car
$\le (x-1)^2 \le$	car
$\le (x-1)^2+2\le$	car

Conclusion: si $-2\le x\le 1$ alors $\le f(x)\le$.

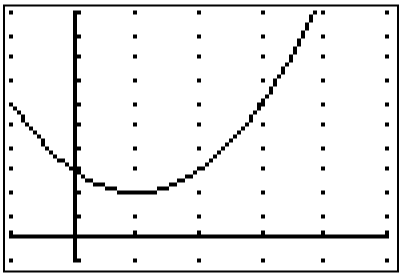
4) Un élève a écrit sur sa copie :

"$0\le x\le 3 \Rightarrow -1\le x-1\le 2 \Rightarrow 1\le (x-1)^2\le 4 \Rightarrow 3\le (x-1)^2+2\le 6$"

Et a tracé sur sa calculatrice la courbe de $(x-1)^2+2$ pour vérifier.

Son résultat est-il cohérent avec le graphe de calculatrice ?

Qu'elle est son erreur ?



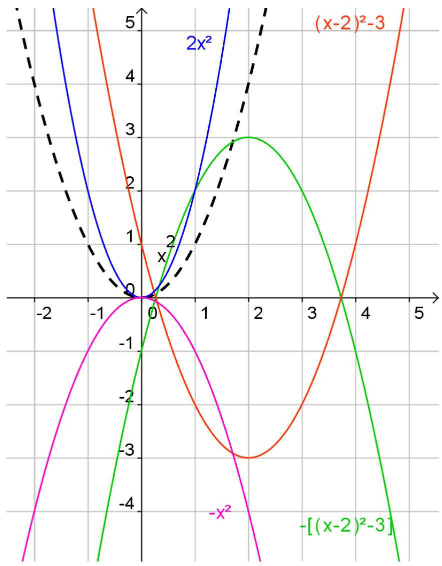
<u>Propriété</u> : Cas général

Le graphe de la fonction $f : x \to ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, est une parabole de sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$, d'axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $a > 0$, les branches de la parabole sont orientées vers le haut.

Si $a < 0$, les branches de la parabole sont orientées vers le bas.

<u>Exemples</u> :



ii) Variations

<u>Propriété</u>:

On considère la fonction $f : x \to ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Si $a > 0$, son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

elle admet un minimum en $-\dfrac{b}{2a}$ qui vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

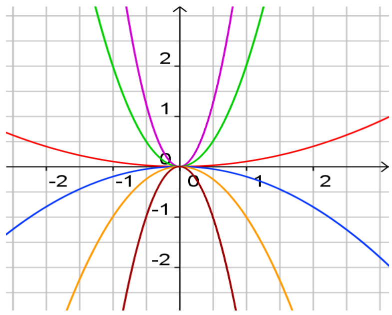
elle admet un maximum en $-\dfrac{b}{2a}$ qui vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

<u>Exercice 27</u> :

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes : $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$

<u>Exercice 28</u> :

Associer les fonctions suivantes avec leurs graphes ci-contre.



$f_1(x) = 5x^2$ $\qquad f_2(x) = 2x^2$ $\qquad f_3(x) = \dfrac{x^2}{10}$

$f_4(x) = -\dfrac{x^2}{5}$ $\qquad f_5(x) = -x^2$ $\qquad f_6(x) = -4x^2$

<u>Exercice 30</u> :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1) On considère un réel h. Réduire au maximum les images $f(1-h)$ et $f(1+h)$.
2) Que remarquez-vous ? Comment expliquer ce résultat ?

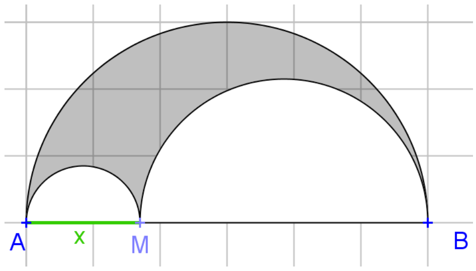
Exercice 29 :

On considère un point M appartenant à un segment $[AB]$.

On appelle « Arbelos d'Archimède » le domaine délimité par les trois demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$.

On suppose que $AB = 6\text{cm}$ et on note x la longueur AM.

On note respectivement $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ l'aire et le périmètre de l'arbelos.



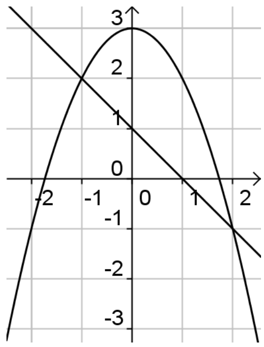
1) Montrer que $\mathcal{P}(x)$ est une fonction constante.
2) Montrer que $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{4}\left(6x - x^2\right)$. Que valent $\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(6)$?
3) En déduire que l'aire de l'arbelos est maximale pour une certaine valeur de x que l'on précisera. Quelle est alors l'aire de l'arbelos ?

d) Factorisation à partir de la forme canonique

Application : Maths au quotidien p 105 « Alerte à Malibu »
Documentation : Maths au quotidien p 295 « Les coniques, la parabole »

Exercice 31 :

Sur le graphique, on a tracé une parabole P et une droite d correspondant respectivement à deux fonctions f et g.



1) Retrouver, à l'aide du graphique, les expressions des fonctions f et g.
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) > g(x)$.
3) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

Exercice 32 : *Méthode d'Al-Khuwarizmi*

Pour déterminer une solution particulière positive de l'équation $x^2 + 10x = 96$, voici comment procédait ce mathématicien arabe du IX$^{\text{ème}}$ siècle :

Diviser 10 par 2.
Elever ce quotient au carré.
Additionner ce carré à 96.
Prendre la racine carrée de cette somme.
Retrancher à ce résultat, le quotient du début. »

1) Vérifier que le résultat de cet algorithme est bien une solution de l'équation.
2) Prouver que l'équation équivaut à l'équation $(x+5)^2 = 121$.
   Expliquer alors pourquoi l'algorithme fournit une solution de l'équation.
3) En utilisant la même méthode, déterminer une solution positive de l'équation $x^2 + 8x = 2009$.
4) Sachant que le nombre α correspond à la solution trouvée avec l'algorithme, compléter les factorisations suivantes pour déterminer l'autre solution β de l'équation :
   $x^2 + 10x - 96 = (x - \alpha)(x - \beta)$ $\qquad$ $x^2 + 8x - 2009 = (x - \alpha)(x - \beta)$

III) Les fonctions homographiques (quotient de deux fonctions affines)

1) La fonction inverse

Définition:

On appelle la fonction "inverse" la fonction f définie par $x \to \frac{1}{x}$.

Elle n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$.

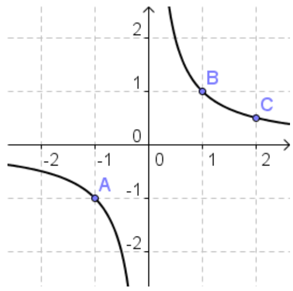
Remarque : Justification de l'impossibilité de diviser par 0.

Propriété:

La fonction inverse ne s'annule jamais.

La fonction inverse est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$.



Démonstration :

1) L'expression $\frac{1}{x}$ ne s'annule que si $1=0$, ce qui est impossible.
2) On applique la règle des signes à l'expression $\frac{1}{x}$.
3) Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 < x_2$, on étudie la différence $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$.

Cette différence est du signe du produit $x_1 x_2$ qui est positif sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$.

Exercice 33 :

1) Déterminer les images des nombres suivants par la fonction inverse :

$4 \quad 0{,}5 \quad -2 \quad 10^5 \quad -10^{-5} \quad -10^{-5} \quad \sqrt{2} \quad -\sqrt{3} \quad 2\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{2}$

2) Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction inverse :

$\frac{4}{3} \quad 0{,}02 \quad 10^{-5}$ et 2×10^4

Exercice 34 :

1) Rappeler les variations de la fonction inverse.
2) Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ si le réel x vérifie $2 \le x \le 3$
3) Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ si le réel x vérifie $-5 \le x \le -3$
4) Peut-on donner un encadrement du réel x^2 si $x \in [-4,3]$?

Exercice 35 :

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

$\frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{\pi - 1}$ $\qquad$ $\frac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercice 36 :

Utiliser le tableau de variation de la fonction inverse pour dire à quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$ lorsque : $a)$ $x \in [1;5]$ $\quad b)$ $x \in [-7;-2]$ $\quad c)$ $x \in]0;5]$ $\quad d)$ $x \in \left]-2;-\frac{1}{5}\right]$

Exercice 37 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes : $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{x} \leq -3$ $\quad \frac{1}{x} > -2$.

2) Fonctions homographiques

> Définition:
>
> On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$,
>
> a, b, c et d étant quatre réels fixés, c étant non nul. Cette fonction n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

PS : Le programme précise simplement que les élèves doivent connaitre l'ensemble de définition.

> Propriété:
>
> Le graphe de la fonction $f : x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$, est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Exercice 38 :

1) Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions homographiques ou pas.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{x} \qquad k(x) = \frac{2x^2-3}{x^2-1} \qquad l(x) = 3 - \frac{1}{x-2}$$

$$m(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \qquad n(x) = 5x - \frac{1}{2x} + 4$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{40x}{20+x} \qquad g(x) = \frac{2x-3}{4x-1} \qquad h(x) = \frac{7}{3+2x}$$

Exercice 39 :

Au XI^{ème} siècle, le mathématicien persan, Omar Ibn Al Hhayyam, a mis au point une technique nouvelle pour résoudre les équations de degré 3. Pour cela, il utilise une méthode graphique par intersection de courbes.

Voici un exemple :

On désigne par (E) l'équation $x^3 - 2x - 3 = 0$.

Le mathématicien déclare :

- ✓ 0 n'est pas une solution de (E).
- ✓ Résoudre (E) revient à résoudre $x^2 - 2 = \frac{3}{x}$.
- ✓ Il suffit de tracer les courbes des fonctions $x^2 - 2$ et $\frac{3}{x}$.

1) Expliquer la méthode.
Tracer les courbes avec la calculatrice et déterminer les valeurs approchées des solutions de l'équation.
2) Utiliser la méthode précédente pour résoudre les équations
$x^3 - x + 1 = 0$ et $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$