**Exercice BILAN « Etude complète d'une fonction rationnelle »**

Considérons la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

**1)** **<u>Ensemble de définition</u>**

Déterminer son ensemble de définition que l'on notera $\mathcal{D}_f$

**2)** **<u>Limites</u>**

Déterminer les limites au bord de l'ensemble de $\mathcal{D}_f$ .

**3)** **<u>Asymptotes et leurs positions par rapport à la courbe</u>**

**a)** **<u>Asymptotes verticales ou horizontales</u>**

Que peut-on déduire de la question 2) en termes d'asymptotes ?

**b)** **<u>Asymptote oblique</u>**

i) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et $-\infty$ .

ii) Etudier les positions relatives de la courbe et de l''asymptote oblique :

**4)** **<u>Variations de la fonction</u>**

Etudier les variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ .

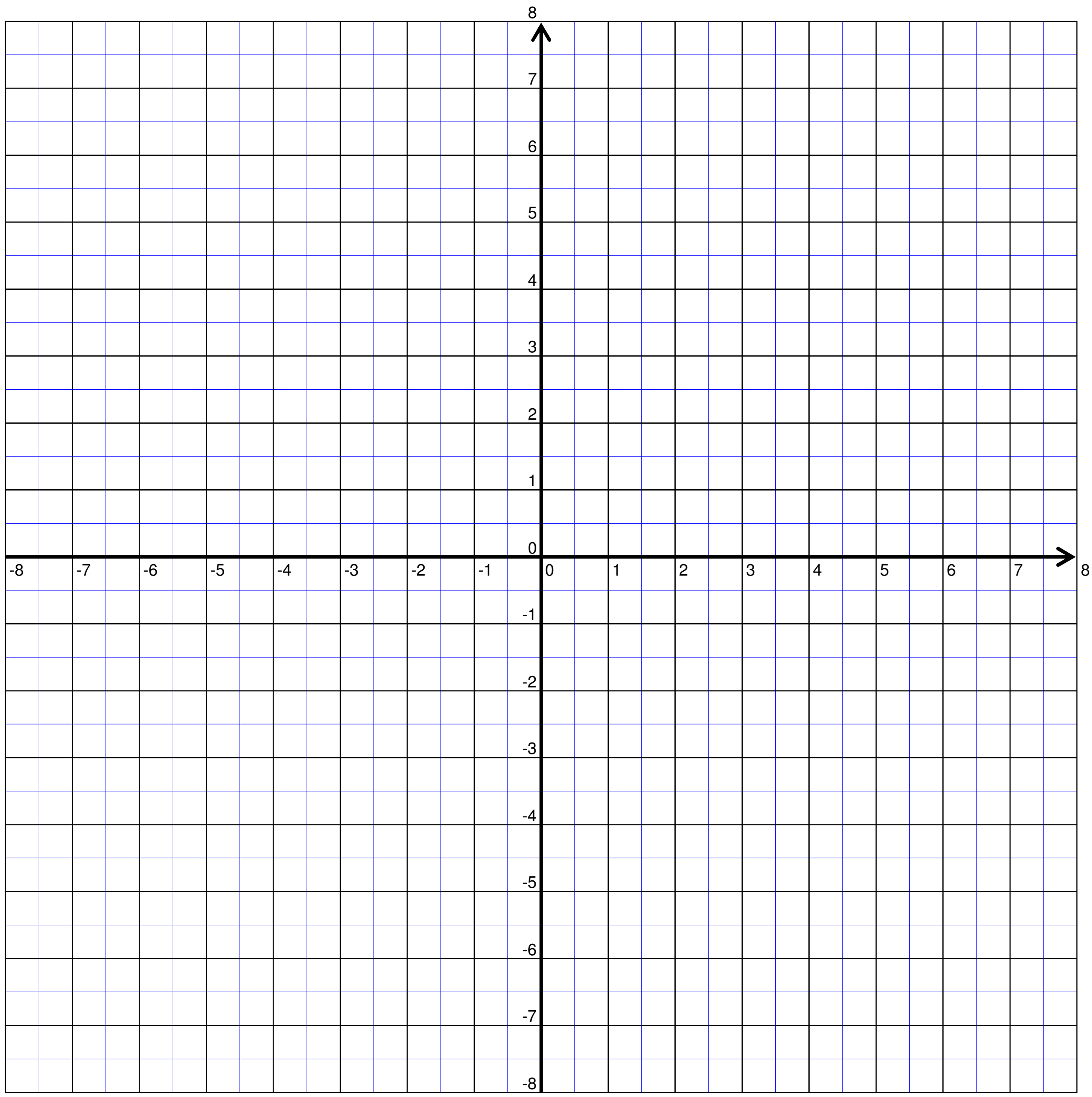
**5)** **<u>Equation d'une tangente :</u>**

Déterminer l'équation de la tangente en 3.

**6)** **<u>Graphe</u>** :

a) Tracer en rouge les deux asymptotes, en bleu la tangente.

b) Tracer la courbe de la fonction *f*.



Considérons la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1) <u>Ensemble de définition</u>**

Il ne faut pas que $x-1=0$, c'est à dire que $x=1$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**2) <u>Limites</u>**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.\ \text{De même,}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-x+1\right)=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)=0^+\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Quotient}}\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty.\ \text{De même,}\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$$

**3) <u>Asymptotes et leurs positions par rapport à la courbe</u>**

**c) <u>Asymptotes verticales ou horizontales</u>**

Comme les limites en 1 sont infinies, la courbe admet une asymptote verticale : la droite d'équation $x=1$.

**d) <u>Asymptote oblique</u>**

i) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et $-\infty$.

$$f(x)-x=\frac{x^2-x+1}{x-1}-x=\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}=\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, en inversant on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0.$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0.$

La droite d'équation $y=x$ est donc bien une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

ii) Etudier les positions relatives de la courbe et de l''asymptote oblique :

La différence $f(x)-x=\dfrac{1}{x-1}$ est du signe de $x-1$.

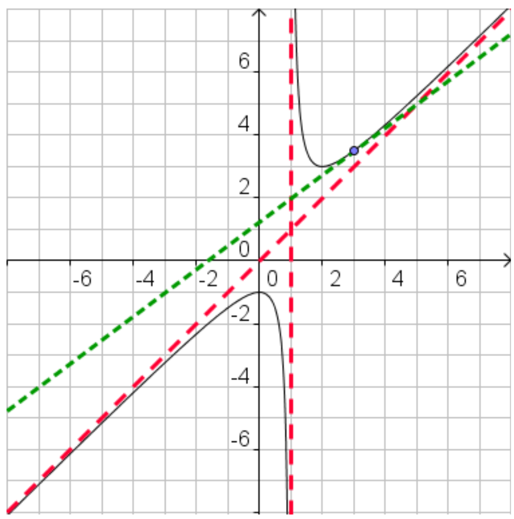
| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Positions relatives | | La courbe est au dessous de l'asymptote | $\Vert$ | La courbe est au dessus de l'asymptote | |

**4) <u>Variations de la fonction</u>**

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\times(x-1)-\left(x^2-x+1\right)\times1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

La dérivée est du signe du trinôme $x^2-2x$ qui a pour racines évidentes 0 et 2.




| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\Vert$ | | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | 3 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**5) <u>Equation d'une tangente :</u>**

On calcule $f'(3)=\dfrac{3(3-2)}{(3-1)^2}=\dfrac{3}{4}$ et $f(3)=\dfrac{3^2-3+1}{3-1}=\dfrac{7}{2}$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est donc $y=\dfrac{3}{4}(x-3)+\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

**6) <u>Graphe</u>**