Exercice 1 :
Exprimer à l'aide du nombre e :

$A=\exp(-4)$ $\quad B=\dfrac{\exp(2.8)}{\exp(0.8)}$ $\quad C=\exp\left(\sqrt{2}-5\right)\times\exp\left(2-\sqrt{2}\right)$

Exercice 2 :
Dans chacun des cas, simplifier l'écriture de $f(x)$:

1) $f(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-e^{x}\left(e^{x}+e^{-3x}\right)$
2) $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}$

Exercice 3 :
Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

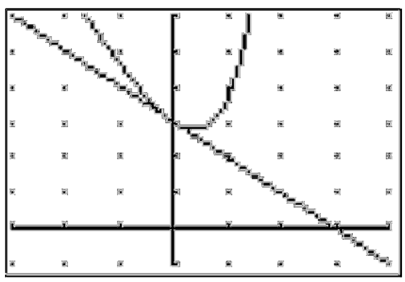
Exercice 4 :
Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=e^{3n-2}$ est une suite géométrique.

Exercice 5 :
Résoudre les équations et inéquations suivantes :
1) $e^{2x+5}=e^{\frac{3}{x}}$
2) $e^{3x-1}=1$
3) $e^{x^2}\leq\left(e^{-x}\right)^{2}e^{3}$
4) $e^{2x}+e^{x}-2=0$ puis $e^{2x}+e^{x}-2>0$

Exercice 6 :
Résoudre les équations et inéquations suivantes :
1) $e^{x}<3$
2) $e^{2x+1}=2$
3) $3e^{3x}-5\geq 0$
4) $e^{x}-\dfrac{10}{e^{x}}=3$

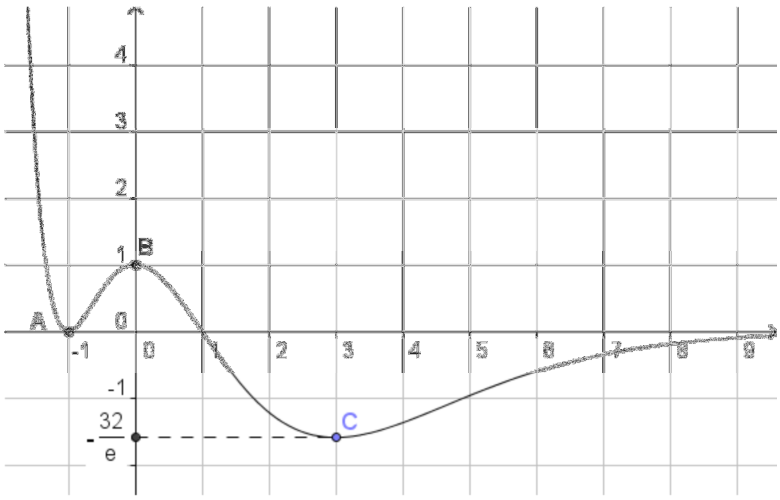
Exercice 7 :
On considère la fonction exponentielle. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
1) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point *A* d'abscisse 0.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point *A* d'abscisse 1.
3) Déterminer les positions relatives de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 8 :
On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b+x\mathrm{e}^{x}$ où a et b sont des réels.
On a tracé sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 :
1) Indiquer à l'aide du graphique $f(0)$ et $f'(0)$.
2) En déduire les valeurs des réels *a* et *b*.



Exercice 9 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)\mathrm{e}^{-x}$ où a, b, c et d sont des réels.
On tracé ci-contre sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.
Les tangentes aux points A, B et C sont horizontales.



1) Etablir graphiquement le tableau des variations de f.
2) A l'aide des renseignements apportées par le graphique, montrer que :
   $a=-1 \quad b=-1 \quad c=1$ et $d=1$
3) Retrouver par le calcul le tableau des variations de f.

Exercice 10 :
Dans chacun des cas, étudier les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{2x-3}}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{2x-3}}$ $\qquad g)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ $\qquad h)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^x\right)$ $\qquad j)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^x\right)$

Exercice 11 :
Dans chacun des cas, étudier les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-e^x\right)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to0}\left(x^2-e^x\right)$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}xe^{\frac{1}{x}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

Exercice 12 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,\mathrm{e}^x$.
1) Etudier les limites au bord de l'ensemble de définition.
2) Dresser le tableau complet (limites et extrema) des variations de la fonction f.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
1) Etudier les limites au bord de l'ensemble de définition.
2) Dresser le tableau complet (limites et extrema) des variations de la fonction f.

Exercice 14 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-2+\mathrm{e}^x$.
1) Etudier les limites au bord de l'ensemble de définition.
2) Dresser le tableau complet (limites et extrema) des variations de la fonction f.
3) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

Exercice 15 : (BAC **Amérique du nord 2007)**

1) Restitution organisée de connaissances (ROC°

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions ϕ et ψ définies sur l'intervalle $[A;+\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A;+\infty[$ $\psi(x)\le\phi(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$.

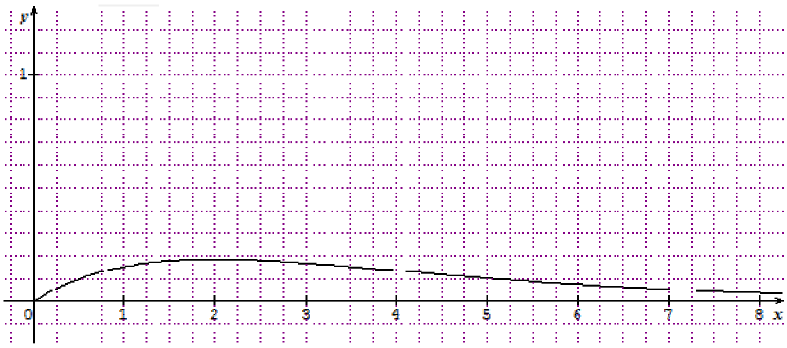
a) On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$ $g(x)\ge 0$.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

2) On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$.

On a représenté ci-dessous sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.



a) Montrer que f est positive sur $[0;+\infty[$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.

c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.

Exercice 16 : (**BAC** Asie 2008)

A - Restitution organisée de connaissances (ROC)

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2) Tracer la courbe $\mathcal{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.
   On prendra 4 cm pour unité graphique.

C - Etude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=(x+1)e^{kx}$.

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k=-1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1}=f$ et $\mathcal{C}_{-1}=\mathcal{C}$.

1)
   a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.

2) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$.

   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

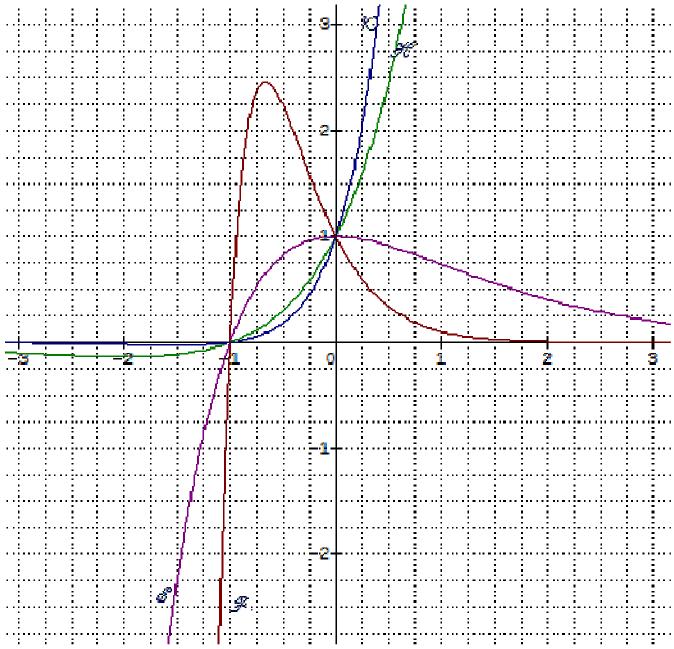
3) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul. En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k.

   (On distinguera les cas : $k>0$ et $k<0$)

4) Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k :

   $k=-1$, $k=-3$, $k=1$ et $k=2$.

   identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Exercice 17 :

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{3x+4}$ vérifie l'équation différentielle $y'=3y$.
2) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'=3y$.
3) Déterminer la solution h de l'équation différentielle $y'=3y$ qui vérifie $h(0)=\mathrm{e}^4$.

Exercice 18 :

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'=kf$ avec $k\in\mathbb{R}$.
Une droite (d) est tangente à la courbe au point d'abscisse $A(0;2)$ et passe par le point $B(-3;1)$.
Exprimer alors $f(x)$ en fonction de *x*.

Exercice 19 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$(1)\ y'=2y$	$(2)\ 3y'=2y$	$(3)\ y'+3y=0$
$(4)\ y'=2y+1$	$(5)\ 3y'-2y=1$	$(6)\ y'+3y=2$

Exercice 20 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$(1)\ \begin{cases} y'=-2y \\ y(0)=3 \end{cases}$ $\qquad (2)\ \begin{cases} 5y'+2y=1 \\ y(1)=-1 \end{cases}$

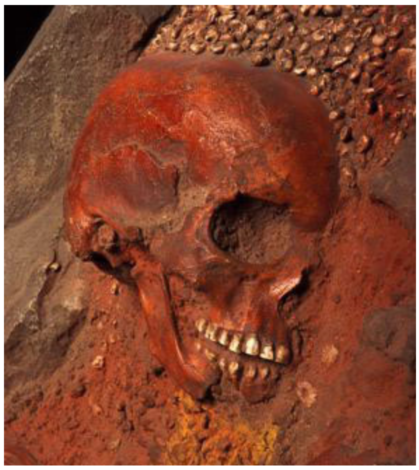
Exercice 21 :

La loi de refroidissement de Newton :« La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant »

Ce mercredi soir, vous avez invité M. Pignon à diner, afin qu'il vous parle de sa passion, et aussi quelques amis. Vous avez fait un gâteau au chocolat pour le dessert. La recette indique de le servir tiède-chaud (entre 25° et 35°C) accompagné d'une boule de glace à la vanille. La température de cuisson est de 200°C. Heureusement pour vous, une loi, dite de Newton, énonce que la vitesse de refroidissement d'un gâteau au chocolat est proportionnelle à la différence entre la température de celui-ci et la température constante de l'air ambiant (le coefficient dépend de la surface du gâteau en contact avec l'air ambiant). Votre salon est chauffé à 19°C et vous laisser refroidir votre gâteau, dès sa sortie du four, dans un coin de votre salon.
Notons $f(t)$ la température du gâteau à l'instant *t* et *k* le coefficient (négatif) de proportionnalité. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $\boxed{y'=k(y-19)}$.

1) Donner l'expression de la température $f(t)$ du gâteau à l'instant *t* sachant que celui-ci est sorti du four (200°C) à l'instant t_0 et se trouve sur le buffet du salon.
2) Vous sortez le gâteau du four à 20 h 15 avant de passer à table. Vous observez qu'à 21 h, en piquant le gâteau par le dessous avec votre thermomètre de cuisine, sa température est de 100 °C.
   A quelle heure pourrez-vous commencer à le servir ? A quelle heure ne sera-t-il plus à souhait ?

Exercice 22 : **Datation au carbone 14**



L'atmosphère terrestre est sans cesse bombardée par un rayonnement cosmique et des protons de haute énergie sont plus ou moins déviés par le champ magnétique terrestre. Ceux qui pénètrent dans l'atmosphère entrent en collision avec des molécules d'azote et d'oxygène de l'air, en donnant naissance à des neutrons qui vont interagir avec l'azote de l'air, pour former un isotope radioactif du carbone, le carbone 14 (qui contient 14 nucléons au lieu de 12). Ce carbone va être oxydé pour donner du dioxyde de carbone, absorbé par les plantes lors de la photosynthèse puis par tous les êtres vivants. A leur mort, il n'y a plus d'emprunt de carbone 14 à l'extérieur et le carbone 14 qu'ils contiennent se désintègre. Par exemple, le bous vivant contient toujours une certaine proportion de carbone 14, et on a constaté que cette quantité était constante dans le monde. Lorsque l'arbre est abattu, le bois cesse de vivre, le processus de photosynthèse s'arrête, et il n'y plus d'absorption de gaz carbonique.
Soit $N(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 existant à l'instant *t*, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique, après la mort de l'organisme (à $t = 0$). La vitesse de désintégration des atomes est proportionnelle au nombre d'atomes présents, le coefficient de proportionnalité est égal à $1,2097\times10^{-4}$

1) Montrer que pour $t\in[0;+\infty[$, $N'(t)=-1,2097\times10^{-4}N(t)$.
2) En appelant N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 initial, c'est-à-dire à la mort de l'organisme vivant, exprimer $N(t)$ en fonction de t.
3) Quel est le pourcentage d'atomes de carbone 14 restants au bout de 10 000 ans ?
4) On appelle période (ou demi-vie) du carbone 14, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Quelle est la période du carbone 14 ?
5) On analyse des os trouvés dans la grotte Chauvet-Pont d'Arc. On constate qu'ils ont perdu 97,5 % de leur carbone 14. Déterminer l'âge des ossements à 1 000 ans près.

Exercice 23 : **Taux d'alcoolémie**

Une personne absorbe, à jeun, une certaine quantité d'alcool. On note t le temps (en heures) écoulé depuis l'absorption.

Son taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) vérifie l'équation différentielle : $y'+y=a\mathrm{e}^{-t}$ où a est une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On considère alors la fonction g définie par $g(t)=f(t)\mathrm{e}^{t}$.
   Démontrer que g est une fonction affine.
2) Exprimer alors $f(t)$ en fonction de t et de a.
3) On suppose dans cette question que $a=5$.
   a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
      Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il sera atteint.
   b) Donner une valeur du délai (minimal à l'heure près) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur ou égal à 0,5 gL^{-1}.

Exercice 24 : **(BAC Antilles 2008)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}-3\mathrm{e}^{-3x}$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+2y=3\mathrm{e}^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'+2y=0$.
2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E_1).
3) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4) En remarquant que $f=g+h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 25 : **(Métropole Septembre 2008)**

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle : $xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$

1)
   a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y'=2y+8$.
   b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=xh(x)$ est solution de (E).
2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(1;0)$? Si oui la préciser.